CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI	THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TỈNH ĐỒNG NAI NĂM HỌC 2012 - 2013 Môn thi: **Toán** (môn chuyên) Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề) *(Đề thi này gồm một trang, có năm câu)*

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho phương trình $x^4-16x^2+32=0$ (với $x\in R$)

Chứng minh rằng $x=\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 2. (2,5 điểm)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x(x+1)(y+1)+xy=-6\\ 2y(y+1)(x+1)+\text{yx}=6\end{cases}$ (với $x\in R, y\in R$).

Câu 3.(1,5 điểm)

Cho tam giác đều MNP có cạnh bằng 2 cm. Lấy n điểm thuộc các cạnh hoặc ở phía trong tam giác đều MNP sao cho khoảng cách giửa hai điểm tuỳ ý lớn hơn 1 cm (với n là số nguyên dương). Tìm n lớn nhất thoả mãn điều kiện đã cho.

Câu 4. (1 điểm)

Chứng minh rằng trong 10 số nguyên dương liên tiếp không tồn tại hai số có ước chung lớn hơn 9.

Câu 5. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC không là tam giác cân, biết tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D,E,F lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I). Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC, biết AD cắt đường tròn (I) tại điểm N (N không trùng với D), giọi K là giao điểm của AI và EF.

1) Chứng minh rằng các điểm I, D, N, K cùng thuộc một đường tròn.
2) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (I).

GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10

CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI

NĂM 2012 – 2013

Môn: Toán chuyên

Câu 1: Phương trình đã cho : $x^4 - 16x^2 + 32 = 0$ (với $x \in R$) ⇔ $(x^2 - 8)^2 - 32 = 0$ (1)

Với $x = \sqrt{6 - 3\sqrt{2 + \sqrt{3}}} - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ ⇔ $x = \sqrt{3}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

=> $x^2 = 8 - 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Thế x vào vế phải của (1) ta có:

$(x^2 - 8)^2 - 32 = (8 - 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\sqrt{2 - \sqrt{3}} - 8)^2 - 32 = 4(2 + \sqrt{3}) + 4\sqrt{3} + 12(2 - \sqrt{3}) - 32$

$= 8 + 4\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 24 - 12\sqrt{3} - 32 = 0$ (vế phải bằng vế trái)

Vậy $x = \sqrt{6 - 3\sqrt{2 + \sqrt{3}}} - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ là một nghiệm của phương trình đã cho (đpcm)

<u>**Câu 2**</u>: Hệ pt đã cho $\begin{cases} 2x(x+1)(y+1) + xy = -6 \\ 2y(y+1)(x+1) + yx = 6 \end{cases} \begin{Bmatrix} (1) \\ (2) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x+1)(y+1) = -6 - xy \\ 2y(y+1)(x+1) = 6 - xy \end{cases}$

Thay x = 0, y = 0 thì hệ không thoả . Thay x = -1 và y = -1 vào, hệ không thoả

=> $(x; y) \neq (0; 0); xy \neq 0; x + 1 \neq 0; y + 1 \neq 0 \Rightarrow 6 - xy \neq 0$ (*)

- Chia từng vế của hai phương trình cho nhau : => $\dfrac{x}{y} = \dfrac{-6 - xy}{6 - xy} \Leftrightarrow xy(x - y) = 6(x + y)$

Thay x = y, hệ pt có vế phải bằng nhau, vế trái khác nhau (không thoả) => $x - y \neq 0$) (**)

$$=> xy = \frac{6(x + y)}{x - y} \qquad (3)$$

- Cộng từng vế (1) và (2) của hệ ta được pt: 2(x+y)(x+1)(y+1) + 2xy = 0 (4)

⇔ (x + y) (x + y + xy + 1) + xy = 0 ⇔ $(x + y)(x + y + 1 + \dfrac{6(x + y)}{x - y}) + \dfrac{6(x + y)}{x - y} = 0$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x+y+1+\frac{6(x+y+1)}{x-y})=0 \Leftrightarrow (x+y)(x+y+1)(1+\frac{6}{x-y})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ x+y+1=0 \\ 1+\frac{6}{x-y}=0 \end{array}\right.$$

- Với x + y = 0 ⇔ x = - y. Thế vào hệ => $-2y^2 = 0$ ⇔ (y = 0 v x = 0) không thoả (*)

- Với x + y +1 =0 ⇔ x = -y - 1 thế vào phương trình (1) của hệ ta được :

$$2y^3+3y^2+y+6=0 \Leftrightarrow (y+2)(2y^2-y+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+2=0 \Leftrightarrow y=-2 \\ 2y^2-y+3=0(vn) \end{array}\right.$$

Với y = - 2 => x = 1.Thế vào hệ thoả, vậy có nghiệm 1: (x; y) = (1; - 2)

- Với $1+\frac{6}{x-y}=0 \Leftrightarrow x-y+6=0 \Leftrightarrow x=y-6$

Thế x = y -6 vào pt (2) của hệ :

$$(2) \Leftrightarrow 2y^3-7y^2-16y-6=0 \Leftrightarrow (2y+1)(y^2-4y-6)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2y+1=0 \\ y^2-4y-6=0 \end{array}\right.$$

$y^2 - 4y - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=2+\sqrt{10} \\ y_2=2-\sqrt{10} \end{array}\right.$

$2y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow y_3 = -\frac{1}{2}$

Từ ba giá trị của y ở trên ta tìm được ba giá trị x tương ứng: $\left[\begin{array}{l} x_1=-4+\sqrt{10} \\ x_2=-4-\sqrt{10} \\ x_3=-\frac{13}{2} \end{array}\right.$

Thế các giá trị (x; y) tìm được vào hệ (thoả).

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm (x;y):

(1; -2), $(-4+\sqrt{10};2+\sqrt{10}),(-4-\sqrt{10};2-\sqrt{10}),(-\frac{13}{2};-\frac{1}{2})$.

Câu 3. (Cách 1)

Tam giác đều có cạnh bằng 2 cm thì diện tích bằng $\sqrt{3}$ cm^2 , tam giác đều có cạnh bằng 1 cm thì diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2 . Nếu tam giác đều có cạnh > 1cm thì diện tích > $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2

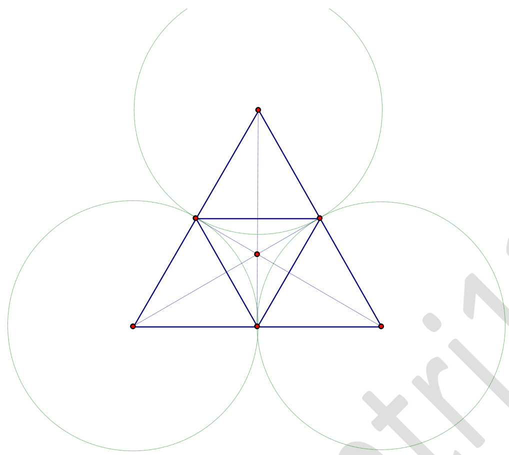
Gọi t là số tam giác đều có cạnh bằng > 1cm chứa được trong tam giác đều có cạnh 2 cm:

$1 \le t \prec 4$ (với t là số nguyên dương) => t_{max} = 3.

Theo nguyên lý Drichen sẽ có 1 trong t tam giác đều có cạnh > 1cm đó chứa tối đa 2 điểm thoả mãn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ luôn > 1 cm.

Vậy số điểm thoả yêu cầu bài toán là : $2 \le n \le 4$ Vậy n_{max} = 4

(Cách 2): Giải theo kiến thức hình học



Nếu ta chọn 3 điểm ở 3 đỉnh của tam giác đều cạnh bằng 2 cm vẽ 3 đường tròn đường kính 1 cm, các đường tròn này tiếp xúc với nhau ở trung điểm mỗi cạnh tam giác. => Các điểm khác trong tam giác cách 3 đỉnh > 1cm chỉ có thể nằm trong phần diện tích còn lại của tam giác (ngoài phần diện tích bị ba hinh tròn che phủ), được giới hạn bởi 3 cung tròn bán kinh 1 cm.

Vì 3 dây cung là 3 đường trung bình của tam giác có độ dài 1 cm => khoảng cách giửa hai điểm bất kỳ nằm trong phần diện tích còn lại đó của tam giác luôn ≤ 1 cm.

=> trong phần diện tích đó chỉ lấy được 1 điểm mà khoảng cách đến 3 đỉnh của tam giác luôn > 1 cm.

Vậy số điểm lớn nhất thoả mãn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ > 1cm là :

n_{max} = 3 + 1 = 4 điểm.

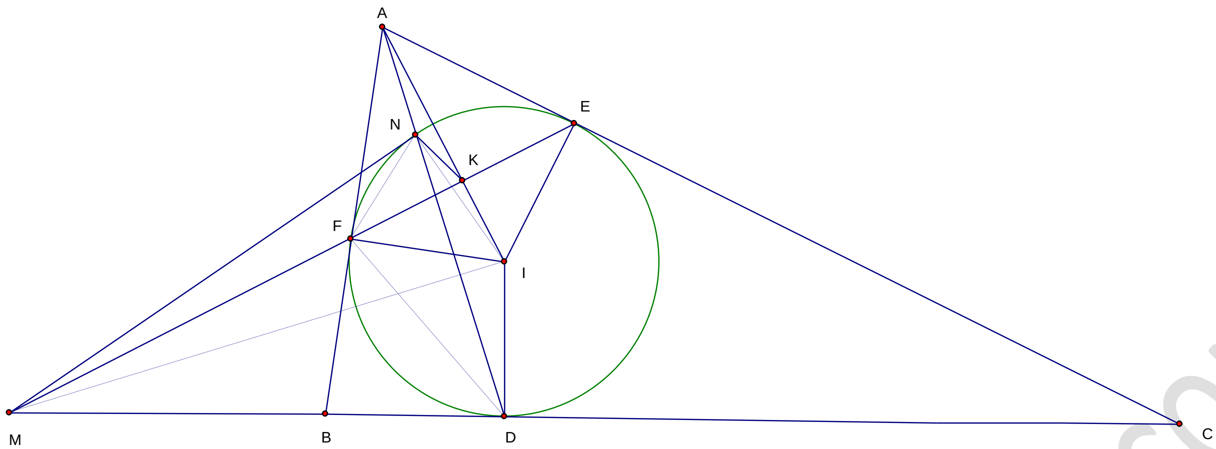
Câu 4. Gọi a và b là hai số bất kỳ trong 10 số nguyên dương liên tiếp với a > b (a; b nguyên dương) $\Rightarrow 1 \le a - b \le 9$.

Gọi n là ước chung của a và b, khi đó : a = n.x và b = n.y (n, x, y là số nguyên dương).

Vì a > b => x > y => $x - y \ge 1$ $\Rightarrow 1 \le n.x - n.y \le 9 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \le x - y \le \frac{9}{n}$ $\Rightarrow \frac{9}{n} \ge 1 \Leftrightarrow n \le 9$

Vậy trong 10 số nguyên dương liên tiếp không tồn tại hai số có ước chung lớn hơn 9.

Câu 5.



1)Nối N và F, D và F.

- Xét ΔANF và $\Delta\Delta$AFD có: $\angle$AFN = $\angle$ADF (vì AF là tt) và $\angle$FAD chung => ΔANF$\backsim\Delta$AFD (g.g)

=> $\frac{AN}{AF} = \frac{AF}{AD} \Leftrightarrow AF^2 = AN.AD$ (1)

- Xét ΔAFI có: AF $\perp$ IF (vì AF tiếp tuyến, FI là bán kính) và FK $\perp$ AI (vì AF và AE tt chung và AI nối tâm) => ΔAFI vuông tại F có FK là đường cao) => AK.AI = AF^2 (2)

- Xét ΔANK và ΔAID có:

+ $\angle$IAD chung.

+ Từ (1) và (2) => AN.AD = AK.AI => $\frac{AN}{AK} = \frac{AI}{AD}$

=> ΔANK$\backsim\Delta$AID (c.g.c) => $\angle$NKA = $\angle$IDN (3)

- Từ (3) => tứ giác DIKN nội tiếp đt (vì có góc đối bằng góc kề bù góc đối)

=> các điểm I,D,N,K cùng thuộc một đường tròn. (đpcm).

2) Ta có ID $\perp$ DM (DM là tiếp tuyến, DI là bán kính) và IK $\perp$ KM (câu 1) => tứ giác DIKM nội tiếp đường tròn đường kính MI. Vì 4 điểm D, I, K, N cũng thuộc một đường tròn (câu 1) => hai đường tròn này cùng ngoại tiếp Δ DIK => hai đường tròn trùng nhau => N cũng nằm trên đường tròn đường kính MI => $\angle INM$ = 90^0 .

Vì IN là bán kính đường tròn (I), $MN \perp IN$ => MN là tiếp tuyến của đường tròn (I) tại tiếp điểm N. (đpcm).

-----------HẾT----------